UN UNIVERS HOMOGÈNE DE MASSE CONSTANTE ET DE RAYON CROISSANT, RENDANT COMPTE DE LA VITESSE RADIALE DES NÉBULEUSES EXTRA-GALACTIQUES

Note de M. l'Abbé G. LEMAÎTRE

1. GÉNÉRALITÉS.

La théorie de la relativité fait prévoir l'existence d'un univers homogène où non seulement la répartition de la matière est uniforme, mais où toutes les positions de l'espace sont équivalentes, il n'y a pas de centre de gravité. Le rayon R de l'espace est constant, l'espace est elliptique de courbure positive uniforme $1/R^2$, les droites issues d'un même point repassent à leur point de départ après un parcours égal à πR, le volume total de l'espace est fini et égal à $\pi^2 R^3$, les droites sont des lignes fermées parcourant tout l'espace sans rencontrer de frontière (1).

Deux solutions ont été proposées. Celle de DE SITTER ignore la présence de la matière et suppose sa densité nulle. Elle conduit à certaines difficultés d'interprétation sur lesquelles nous aurons l'occasion de revenir, mais son grand intérêt est d'expliquer le fait que les nébuleuses extra-galactiques semblent nous fuir avec une énorme vitesse, comme une simple conséquence des propriétés du champ de gravitation, sans supposer que nous nous trouvons en un point de l'univers doué de propriétés spéciales.

L'autre solution est celle d'EINSTEIN. Elle tient compte du fait évident que la densité de la matière n'est pas nulle et elle conduit à une relation entre cette densité et le rayon de l'univers. Cette relation a fait prévoir l'existence de masses énormément supérieures à tout ce qui était connu lorsque la théorie a été pour la première fois comparée avec les faits. Ces masses ont été depuis découvertes lorsque les distances et les dimensions des nébuleuses extra-galactiques ont pu être établies. Le rayon de l'univers calculé par la formule d'Einstein est d'après les données récentes quelques

---

observées toutes deux : Il calcule les éléments de l'éclipse de lune (la date Phamenoth 9 donnée par l'éd. de Bâle est une dittographie de la dernière lettre du nom du mois. Tous les mss sont Phamenoth 6, an 1112) puis conclut : ... ἀκολούθως τοῖς κατὰ τὴν τήρησιν γεγενημένοις ἡμῖν τῶν τοιούτων χρόνων ἐπιλογισμοῖς. « conformément aux calculs des » temps exécutés par nous d'après l'observation » [éd. Bâle, p. 320, tous les mss sont d'accord]. Il est assez naturel de supposer que l'observation en question a été faite sous sa direction, surtout quand on rapproche le passage cité, de cet autre, relatif à l'éclipse de soleil du 16 juin de la même année : καὶ ἔτι τὸν μὲν τῆς ἀρχῆς τῆς ἐμπτώσεως χρόνον ἀσφαλέστατα ἐτηρήσαμεν, « nous avons observé avec grande précision l'heure » du premier contact » [éd. Bâle, p. 332]. Il est inutile d'observer que tout ce qui peut se dire sur Théon, a fatalement un caractère provisoire, tant que le travail d'édition ne sera pas terminé. Le texte de Pappus est établi ; on peut donc aborder les questions qui s'y rapportent avec quelque chance de les résoudre.

(1) Nous considérons l'espace simplement elliptique, c'est-à-dire sans antipodes.

centaines de fois plus grand que la distance des objets les plus éloignés photographiés dans nos télescopes (1).

Les deux solutions ont donc leurs avantages. L'une s'accorde avec l'observation des vitesses radiales des nébuleuses, l'autre tient compte de la présence de la matière et donne une relation satisfaisante entre le rayon de l'univers et la masse qu'il contient. Il semble désirable d'obtenir une solution intermédiaire qui pourrait combiner les avantages de chacune d'elles.

A première vue, un tel intermédiaire n'existe pas. Un champ de gravitation statique et de symétrie sphérique n'admet que deux solutions, celle d'Einstein et celle de de Sitter, si la matière est uniformément répartie et n'est soumise à aucune pression ou tension intérieure. L'Univers de de Sitter est vide, celui d'Einstein a pu être décrit comme contenant autant de matière qu'il en peut contenir ; il est étonnant que la théorie ne puisse fournir un juste milieu entre ces deux extrêmes.

Le paradoxe s'éclaircit lorsqu'on se rend compte que la solution de de Sitter ne répond pas à toutes les nécessités du problème (2). L'espace y est bien homogène, de courbure positive constante ; l'espace-temps aussi est homogène, tous les points de l'univers sont parfaitement équivalents ; mais la division de l'espace-temps en espace et en temps ne respecte plus l'homogénéité. Les coordonnées choisies introduisent un centre auquel rien ne correspond dans la réalité ; un point immobile au centre de l'espace décrit une géodésique de l'univers, un point immobile autre part

---

(1) Cf. Hubble E. Extra-galactic nebulae, *Ap. J.*, vol. 64, p. 321, 1926. *Mt Wilson Contr.* No 324.

(2) Cf K. Lanczos. — Bemerkung zur de Sitterschen Welt. *Phys. Zeitschr.*, vol. 23, p. 539, 1922, et H. Weyl. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Id., vol. 24, p. 230, 1923. Nous suivons ici le point de vue de Lanczos. Les lignes d'univers des nébuleuses forment une gerbe de centre idéal et d'hyperplan axial réel ; l'espace normal à ces lignes d'univers est formé par les hypersphères équidistantes au plan axial. Cet espace est elliptique, son rayon variable étant minimum à l'instant correspondant au plan axial. Dans l'hypothèse de Weyl, les lignes d'univers sont parallèles dans le passé ; les hypersurfaces normales représentant l'espace sont des horosphères, la géométrie de l'espace est donc euclidienne. La distance spatiale entre les nébuleuses augmente au fur et à mesure que les géodésiques parallèles qu'elles décrivent s'écartent l'une de l'autre, proportionnellement à $e^{t/R}$, où t est le temps propre et R le rayon de l'univers. L'effet Doppler est égal à r/R, où r est la distance de la source à l'instant de l'observation. Cf. G. Lemaître. Note on de Sitter's universe. *Journal of mathematics and physics*, vol 4, no 3, May 1925, ou *Publications du Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain*, vol. 2, p. 37, 1925. Pour la discussion de la partition de de Sitter, voir P. Du Val : Geometrical note on de Sitter's world. *Phil. Mag.* (6), vol. 47, p. 930, 1924. L'espace est formé d'hyperplans normaux à une droite temporelle décrite par le centre introduit, les trajectoires des nébuleuses sont les trajectoires orthogonales de ces plans, elles ne sont généralement plus des géodésiques et elles tendent à devenir des lignes de longueur nulle lorsqu'on s'approche de l'horizon du centre, c'est-à-dire de l'hyperplan polaire de l'axe central par rapport à l'absolu.

qu'au centre ne décrit pas une géodésique de l'univers. Le choix des coordonnées rompt donc l'homogénéité qui existait dans les données du problème, de là proviennent les résultats paradoxaux qui apparaissent à l' « horizon » du centre. Lorsqu'on introduit des coordonnées et une division correspondante de l'espace et du temps respectant l'homogénéité de l'univers, on trouve que le champ n'est plus statique, on obtient un univers de même forme que celui d'Einstein, mais où le rayon de l'espace au lieu de demeurer invariable varie avec le temps suivant une loi particulière (1).

Pour trouver une solution présentant simultanément les avantages de celle d'Einstein et de celle de de Sitter, nous sommes ainsi conduits à étudier un univers d'Einstein où le rayon de l'espace (ou de l'univers) varie d'une façon quelconque.

2. Univers d'Einstein a rayon variable. Équations du champ de gravitation. Conservation de l'énergie.

Tout comme pour la solution d'Einstein, nous assimilons l'univers à un gaz très raréfié dont les nébuleuses extra-galactiques forment les molécules ; nous les supposons assez nombreuses pour qu'un volume petit par rapport à l'ensemble de l'univers contienne assez de nébuleuses pour que nous puissions parler de la densité de la matière. Nous ignorons l'influence possible de condensations locales. De plus, nous supposons que la répartition des nébuleuses est uniforme et donc que la densité est indépendante de la position.

Pour une variation arbitraire du rayon de l'univers la densité, uniforme dans l'espace, varie avec le temps. De plus, la matière est, en général, soumise à des tensions qui, à cause de l'homogénéité, se réduisent à une simple pression uniforme dans l'espace et variable avec le temps. La pression est égale aux deux tiers de l'énergie cinétique des molécules, elle est négligeable vis-à-vis de l'énergie condensée dans la matière, il en est de même des pressions intérieures des nébuleuses ou des étoiles qu'elles contiennent ; nous sommes donc conduits à poser $p = 0$. Peut-être

(1) Si on se borne à deux dimensions, une d'espace et une de temps, la division d'espace et de temps utilisée par de Sitter peut être représentée sur une sphère : les lignes d'espace sont fournies par un système de grands cercles se coupant sur un même diamètre et les lignes temporelles sont les parallèles coupant normalement les lignes spatiales. Un de ces parallèles est un grand cercle et donc une géodésique, il correspond au centre de l'espace, le pôle de ce grand cercle est un point singulier correspondant à l'horizon du centre. La représentation doit naturellement être étendue à quatre dimensions et la coordonnée temporelle doit être supposée imaginaire, mais le défaut d'homogénéité résultant du choix des coordonnées subsiste. Les coordonnées respectant l'homogénéité reviennent à prendre pour lignes temporelles un système de méridiens et pour lignes spatiales les parallèles correspondants, alors le rayon de l'espace varie avec le temps.

faudrait-il tenir compte de la pression de radiation de l'énergie rayonnante circulant dans l'espace ; cette énergie est fort faible, mais elle est répartie dans tout l'espace et fournit peut-être une contribution importante à l'énergie moyenne. Nous garderons le terme p dans les équations générales en l'interprétant comme la pression de radiation moyenne de la lumière, mais nous poserons $p = 0$, lorsque nous en viendrons à l'application aux phénomènes astronomiques.

Nous désignons par ρ la densité de l'énergie totale, la densité de l'énergie rayonnante sera $3p$ et la densité de l'énergie concentrée dans la matière est $\delta = \rho - 3p$.

Il faut identifier ρ et $-p$ avec les composantes T_4^4 et $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$ du tenseur d'énergie matérielle et δ avec T. Calculons les composantes du tenseur de Riemann contracté pour un univers d'intervalle

$$ds^2 = -R^2 d\sigma^2 + dt^2 \tag{1}$$

$d\sigma$ est l'élément de longueur d'un espace de rayon égal à un ; le rayon R de l'espace est une fonction du temps. Les équations du champ de gravitation s'écrivent

$$3\frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \tag{2}$$

et

$$2\frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \kappa p \tag{3}$$

Les accents désignent des dérivées par rapport à t ; λ est la constante cosmologique dont la valeur est inconnue et κ la constante d'Einstein égale à $1{,}87 \times 10^{-27}$ en unités C. G. S. (8π en unités naturelles).

Les quatre identités exprimant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie se réduisent ici à

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3R'}{R}(\rho + p) = 0 \tag{4}$$

qui exprime la conservation de l'énergie. Cette équation peut donc remplacer (3). Elle est susceptible d'une interprétation intéressante. Introduisant le volume de l'espace $V = \pi^2 R^3$, elle peut s'écrire

$$d(V\rho) + p\,dV = 0 \tag{5}$$

et elle exprime que *la variation de l'énergie totale plus le travail effectué par la pression de radiation est égale à zéro.*

3. Cas où la masse totale de l'univers demeure constante.

Cherchons une solution pour laquelle la masse totale $M = V\delta$ demeure constante. Nous pourrons alors poser

$$\kappa\delta = \frac{\alpha}{R} \tag{6}$$

où α est une constante. Tenant compte de la relation

$$\rho = \delta + 3p$$

existant entre les diverses sortes d'énergie, le principe de conservation de l'énergie devient

$$3\,d(\rho R^3) + 3p\,R^2\,dR = 0 \tag{7}$$

dont l'intégration est immédiate ; β désignant une constante d'intégration, nous avons

$$\kappa p = \frac{\beta}{R^4} \tag{8}$$

et donc

$$\kappa\rho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4} \tag{9}$$

Substituant dans (2), nous avons à intégrer

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4} \tag{10}$$

ou

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}} \tag{11}$$

Pour α et β égaux à zéro, nous trouvons la solution de de Sitter (1)

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\cosh\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\,(t - t_0) \tag{12}$$

La solution d'Einstein s'obtient en posant $\beta = 0$ et R constant. Posant $R' = R'' = 0$ dans (2) et (3), il vient

$$\frac{1}{R^2} = \lambda \qquad \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \qquad \rho =$$

donc

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad \kappa\delta = \frac{2}{R^2} \tag{13}$$

et d'après (6)

$$\alpha = \kappa\delta\,R^3 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \tag{14}$$

---

(1) Cf. Lanczos, *l. c.*

La solution d'Einstein ne résulte pas de la seule relation (14), il faut en outre que la valeur initiale de R′ soit nulle. En effet, écrivant pour simplifier les écritures

$$\lambda = \frac{1}{R_o^2} \tag{15}$$

et posant dans (11) $\beta = 0$ et $\alpha = 2R_o$, il vient

$$t = R_o\sqrt{3}\int \frac{dR}{R - R_o}\sqrt{\frac{R}{R + 2R_o}} \tag{16}$$

Pour cette solution les deux équations (13) ne seront naturellement plus vérifiées. Si nous écrivons

$$\kappa\delta = \frac{2}{R_E^2} \tag{17}$$

nous aurons d'après (14) et (15)

$$R^3 = R_E^2\, R_o \tag{18}$$

La valeur de R_E, rayon de l'univers déduit de la densité moyenne par la formule d'Einstein (17), a été estimée par Hubble à

$$R_E = 8{,}5 \times 10^{28} \text{ cm.} = 2{,}7 \times 10^{10} \text{ parsecs} \tag{19}$$

Nous alons voir que la valeur de R_o peut se déduire de la vitesse radiale des nébuleuses ; R pourra alors être calculé par la formule (18). Nous montrerons ensuite qu'une solution introduisant une relation sensiblement différente de (14) conduirait à des conséquences difficilement admissibles.

4. Effet Doppler dû a la variation du rayon de l'univers.

D'après la forme (1) de l'intervalle d'univers, l'équation d'un rayon lumineux est

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} \tag{20}$$

où σ_1 et σ_2 sont les valeurs d'une coordonnée caractérisant la position dans l'espace. Nous pouvons parler du point σ_2 où nous supposerons localisé l'observateur et du point σ_1 où se trouve la source de lumière.

Un rayon émis un peu plus tard partira de σ_1 au temps $t_1 + \delta t_1$ et arrivera en σ_2 au temps $t_2 + \delta t_2$. Nous aurons donc

$$\frac{\delta t_2}{R_2} - \frac{\delta t_1}{R_1} = 0, \quad \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \tag{21}$$

où R_1 et R_2 désignent respectivement les valeurs de R aux temps t_1 et t_2. t est le temps propre ; si δt_1 est la période de la lumière émise, δt_2 est la

période de la lumière reçue et δt_1 peut encore être considéré comme la période d'une lumière émise dans les mêmes conditions dans le voisinage de l'observateur. En effet, la période de la lumière émise dans des conditions physiques semblables doit être partout la même lorsqu'elle est exprimée en temps propre.

$$\frac{v}{c} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \tag{22}$$

mesure donc l'effet Doppler apparent dû à la variation du rayon de l'univers. *Il est égal à l'excès sur l'unité du rapport des rayons de l'univers à l'instant où la lumière est reçue et à l'instant où elle est émise.* v est la vitesse de l'observateur qui produirait le même effet. Lorsque la source est suffisamment proche nous pouvons écrire approximativement

$$\frac{v}{c} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{dR}{R} = \frac{R'}{R}\, dt = \frac{R'}{R}\, r$$

où r est la distance de la source. Nous avons donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{cr} \tag{23}$$

Les vitesses radiales de 43 nébuleuses extra-galactiques sont données par Strömberg [1].

La grandeur apparente m de ces nébuleuses se trouve dans le travail de Hubble. Il est possible d'en déduire leur distance, car Hubble a montré que les nébuleuses extra-galactiques sont de grandeurs absolues sensiblement égales (grandeur — 15,2 à 10 parsecs, les écarts individuels pouvant atteindre deux grandeurs en plus ou en moins), la distance r exprimée en parsecs est alors donnée par la formule $\log r = 0{,}2m + 4{,}04$.

On trouve une distance de l'ordre de 10^6 parsecs, variant de quelques dixièmes à 3,3 millions de parsecs. L'erreur probable résultant de la dispersion en grandeur absolue est d'ailleurs considérable. Pour une différence de grandeur absolue de deux grandeurs en plus ou en moins, la distance passe de 0,4 à 2,5 fois la distance calculée. De plus, l'erreur à craindre est proportionnelle à la distance. On peut admettre que pour une distance d'un million de parsecs, l'erreur résultant de la dispersion en grandeur est du même ordre que celle résultant de la dispersion en vitesse. En effet, une différence d'éclat d'une grandeur correspond à une vitesse propre de 300 Km. égale à la vitesse propre du soleil par rapport aux nébuleuses. On peut espérer éviter une erreur systématique en donnant aux observations un poids proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, où r est la distance en millions de parsecs.

---

(1) Analysis of radial velocities of globular clusters and non galactic nebulae. *Ap. J.* Vol. 61, p. 353, 1925. *Mt Wilson Contr.* N° 292.

Utilisant les 42 nébuleuses figurant dans les listes de Hubble et de Strömberg [1], et tenant compte de la vitesse propre du soleil (300 Km. dans la direction $\alpha = 315°$, $\delta = 62°$), on trouve une distance moyenne de 0,95 millions de parsecs et une vitesse radiale de 600 Km./sec, soit 625 Km./sec à 10^6 parsecs [2].

Nous adopterons donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{rc} = \frac{625 \times 10^5}{10^6 \times 3{,}08 \times 10^{18} \times 3 \times 10^{10}} = 0{,}68 \times 10^{-27}\ \text{cm}^{-1} \qquad (24)$$

Cette relation nous permet de calculer R_0. Nous avons en effet par (16)

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{R_0\sqrt{3}}\sqrt{1 - 3y^2 + 2y^3} \qquad (25)$$

où nous avons posé

$$y = \frac{R_0}{R} \qquad (26)$$

D'autre part, d'après (18) et (26),

$$R_0^2 = R_E^2\, y^3 \qquad (27)$$

et donc

$$3\left(\frac{R'}{R}\right)^2 R_E^2 = \frac{1 - 3y^2 + 2y^3}{y^3} \qquad (28)$$

Introduisant les valeurs numériques de $\frac{R'}{R}$ (24) et de R_E (19), il vient :

$$y = 0{,}0465.$$

On a alors :

$$R = R_E\sqrt{y} = 0{,}215\ R_E = 1{,}83 \times 10^{28}\ \text{cm.} = 6 \times 10^9\ \text{parsecs}$$

$$R_0 = Ry = R_E\, y^{\frac{3}{2}} = 8{,}5 \times 10^{26}\ \text{cm.} = 2{,}7 \times 10^8\ \text{parsecs}$$

$$= 9 \times 10^8\ \text{années de lumière.}$$

---

(1) Il n'est pas tenu compte de N. G. C. 5194 qui est associé à N. G. C. 5195. L'introduction des nuées de Magellan serait sans influence sur le résultat.

(2) En ne donnant pas de poids aux observations, on trouverait 670 Km./sec à $1{,}16 \times 10^6$ parsecs, 575 Km./sec à 10^6 parsecs. Certains auteurs ont cherché à mettre en évidence la relation entre v et r et n'ont obtenu qu'une très faible corrélation entre ces deux grandeurs. L'erreur dans la détermination des distances individuelles est du même ordre de grandeur que l'intervalle que couvrent les observations et la vitesse propre des nébuleuses (en toute direction) est grande (300 Km./sec. d'après Strömberg), il semble donc que ces résultats négatifs ne sont ni pour ni contre l'interprétation relativistique de l'effet Doppler. Tout ce que l'imprécision des observations permet de faire est de supposer v proportionnel à r et d'essayer d'éviter une erreur systématique dans la détermination du rapport v/r. Cf. LUNDMARK. The determination of the curvature of space time in de Sitter's world M. N., vol. 84, p. 747, 1924, et STRÖMBERG, *l. c.*

L'intégrale (16) se calcule facilement. Posant

$$x^2 = \frac{R}{R + 2R_o} \tag{29}$$

elle s'écrit

$$t = R_o\sqrt{3}\int\frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)(3x^2-1)} = R_o\sqrt{3}\log\frac{1+x}{1-x} + R_o\log\frac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1} + C \tag{30}$$

Si nous désignons par σ la fraction du rayon de l'univers parcourue par la lumière au temps t, nous avons aussi par (20) :

$$\sigma = \int\frac{dt}{R} = \sqrt{3}\int\frac{2dx}{3x^2-1} = \log\frac{\sqrt{3}\,x-1}{\sqrt{3}\,x+1} + C'. \tag{31}$$

Nous donnons ci-dessous une table de σ et t en fonction de $\frac{R}{R_o}$.

$\frac{R}{R_o}$	$\frac{t}{R_o}$	σ RADIANS	σ DEGRÉS	$\frac{v}{c}$
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	19
2	$-4,31$	$-0,889$	$-51°$	9
3	$-3,42$	$-0,521$	$-30°$	$5\frac{2}{3}$
4	$-2,86$	$-0,359$	$-21°$	4
5	$-2,45$	$-0,266$	$-15°$	3
10	$-1,21$	$-0,087$	$-5°$	1
15	$-0,50$	$-0,029$	$-1°7$	$\frac{1}{3}$
20	0	0	0	0
25	0,39	0,017	1°	
∞	∞	0,087	5°	

Les constantes d'intégration sont choisies de telle sorte que σ et t soient nuls pour $\frac{R}{R_o} = 20$ au lieu de 21,5. La dernière colonne donne l'effet Doppler calculé par la formule (22). D'après la formule approchée (23) $\frac{v}{c}$ serait proportionnel à r et donc à σ. L'erreur commise en adoptant cette équation n'est que de cinq millièmes pour $\frac{v}{c} = 1$. Elle peut donc être employée tant que le spectre reste visible.

5. Signification de la relation (14).

Nous avons introduit la relation (14) entre les constantes α et λ d'après la solution d'Einstein. Cette relation est la condition pour que l'expression sous le radical au dénominateur de l'intégrale (11) admette une racine double R_0 donnant par intégration un terme logarithmique. Pour des racines simples, on obtiendrait par intégration une racine carrée et la valeur de R correspondante serait un minimum comme dans la solution (12) de de Sitter. Ce minimum se produirait généralement à une époque de l'ordre de R_0, soit 10^9 années, c'est-à-dire à une époque récente à l'échelle de l'évolution stellaire. Il semble donc que la relation existant entre les constantes α et λ doit être voisine de (14) pour laquelle ce minimum est rejeté à l'époque moins l'infini (1).

6. Conclusion.

Nous avons obtenu une solution qui vérifie les conditions suivantes :

1. La masse de l'univers est constante et est liée à la constante cosmologique par la relation d'Einstein

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi^2}{\kappa M} = \frac{1}{R_0}$$

2. Le rayon de l'univers croît sans cesse depuis une valeur asymptotique R_0 pour $t = -\infty$.

3. L'éloignement des nébuleuses extra-galactiques est un effet cosmique dû à l'expansion de l'espace et permettant de calculer le rayon R_0 par les formules (24) et (25) ou approximativement par $R_0 = \frac{rc}{v\sqrt{3}}$.

4. Le rayon de l'univers est du même ordre de grandeur que le rayon R_E déduit de la densité par la formule d'Einstein. On a

$$R = R_E \sqrt[3]{\frac{R_0}{R_E}} = \frac{1}{5} R_E$$

Cette solution concilie les avantages de celles de de Sitter et d'Einstein.

Remarquons que la plus grande partie de l'univers est à jamais hors de notre atteinte. La portée du grand télescope du Mont Wilson est estimée par Hubble à 5×10^7 parsecs soit $\frac{1}{120}R$, l'effet Doppler correspondant est déjà de 3000 Km/sec. Pour une distance de $0{,}087\,R$, il est égal à un, toute la lumière visible est rejetée dans l'infra-rouge. Il est impossible que se

---

(1) Si les racines positives devenaient imaginaires, le rayon varierait à partir de zéro, la variation étant ralentie au voisinage du module des racines imaginaires. Pour une relation sensiblement différente de (14), ce ralentissement serait faible et la durée de l'évolution à partir de $R = 0$ serait encore de l'ordre de R_0.

forment des images fantômes des nébuleuses ou des soleils parce que, si même aucune absorption ne se produisait, ces images seraient rejetées de plusieurs octaves dans l'infra-rouge et ne pourraient être observées.

Il resterait à se rendre compte de la cause de l'expansion de l'univers. Nous avons vu que la pression de radiation travaille lors de l'expansion. Ceci semble suggérer que cette expansion a été produite par la radiation elle-même. Dans un univers statique la lumière émise par la matière parcourt l'espace fermé, revient à son point de départ et s'accumule sans cesse. Il semble que là doit être cherchée l'origine de la vitesse d'expansion R'/R qu'Einstein supposait nulle et qui dans notre interprétation est observée comme vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques.

SUR UNE EXPRESSION DE π EN SÉRIE

Note de M. Oct. Delhez

Bien que l'on puisse obtenir à l'infini des valeurs en séries pour π, et qu'il en existe de très recommandables, — telle celle de Lucas — nous avons cru devoir attirer l'attention sur la suivante, dont le premier terme est précisément l'entier de cette transcendante classique.

Une simple intégration par parties donne

$$\int l\,(1+x^2)\,dx = x\left[l\,(1+x^2)-2\right]+2\,\text{arc tg}\,x \text{ (}^1\text{)} \qquad (1)$$

sans constante, parce que, pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$, le premier membre est développable en

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{x^{2\lambda+3}}{2\lambda+3}, \qquad (2)$$

et que les deux membres s'annulent pour $x=0$.

Égalons actuellement (1) et (2), multiplions les deux parties de cette égalité par dx et intégrons entre 0 et x ; nous avons ainsi

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{(x+1)(2\lambda+3)} \cdot \frac{x^{2\lambda+4}}{2\lambda+4} = \frac{x^2-1}{2}\,l\,(1+x^2) - \frac{3}{2}x^2 + 2x\,\text{arc tg}\,x. \qquad (3)$$

Soit fait dès lors, dans (3), $x=1$; il vient

$$\pi = 3 + 2\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{(\lambda+1)(2\lambda+3)(2\lambda+4)}.$$

---

(1) La lettre l désigne un logarithme népérien.